

2. Constructions élémentaires

2.1. Uplets, familles

On appelle uplet (ou n -uplet) toute méta-fonction de domaine un méta-ensemble d'un nombre fini (n) de symboles de variables, à valeurs parmi les objets. C'est donc un système d'interprétations de ces variables. On peut les ajouter à toute théorie comme nouveau type d'objets, servant à abréger n variables de types préexistants en une seule du nouveau type. En pratique, pour chaque entier n on ne considèrera que les n -uplets de domaine le méta-ensemble \mathcal{A}_n des n chiffres de 0 à $n - 1$. Un 2-uplet s'appelle un *couple*, un 3-uplet est un *triplet*, un 4-uplet est un *quadruplet*...

La fixation du méta-argument curryfie l'évaluateur en n foncteurs appelés *projections*: les n -uplets sont séparément évalués en chaque $i \in \mathcal{A}_n$, par la i -ième projection π_i qui restitue la valeur de la i -ième variable. Les projections des couples seront notées π et π' .

Le définisseur de n -uplet est un opérateur n -aire (non liant), présentant ses n arguments dans une parenthèse et séparés par des virgules: $(\ , \dots, \)$. Ces opérateurs sont reliés par les axiomes suivants dont le premier résume les $n + 1$ autres : pour tous x_0, \dots, x_{n-1} et tout n -uplet x ,

$$\begin{aligned} x = (x_0, \dots, x_{n-1}) &\Leftrightarrow (\pi_0(x) = x_0 \wedge \dots \wedge \pi_{n-1}(x) = x_{n-1}) \\ x_i = \pi_i((x_0, \dots, x_{n-1})) &\text{ pour chaque } i \in \mathcal{A}_n \\ x = (\pi_0(x), \dots, \pi_{n-1}(x)) & \end{aligned}$$

Les couples suffisent à construire les n -uplets pour tout $n > 2$. Par exemple les triplets $t = (x, y, z)$ peuvent se définir par $t = ((x, y), z)$ évalué par $x = \pi(\pi(t)), y = \pi'(\pi(t)), z = \pi'(t)$.

Connecteur conditionnel

Ce connecteur d'arité 3, noté $(\rightarrow |)$, qu'on lit “*Si A alors B sinon C*”, se définit par

$$\begin{aligned} (A \rightarrow B|C) &\Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (\neg A \rightarrow C|B) \Leftrightarrow (C, B)(A) \\ &\Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)) \Leftrightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (A \wedge B)) \not\Leftrightarrow (A \rightarrow \neg B|\neg C) \end{aligned}$$

où $(C, B)(A)$ évalue le couple (C, B) en $A \in \mathcal{A}_2 = \{0, 1\}$.

Il permet de réduire tout connecteur K d'arité $n + 1$ en 2 connecteurs d'arité n :

$$K(A) \Leftrightarrow (A \rightarrow K(1)|K(0)).$$

Ainsi, $\neg A \Leftrightarrow (A \rightarrow 0|1)$; $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B|1)$; $(A \vee B) \Leftrightarrow (A \rightarrow 1|B)$; $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B|\neg B)$.

Familles

La théorie des ensembles peut représenter les n -uplets comme fonctions (réutilisant les outils des fonctions), en figurant \mathcal{A}_n comme ensemble d'objets chacun désigné par une constante.

Une *famille* est une fonction interprétée comme généralisant la notion d'uplet: son argument est noté comme variable, de domaine un ensemble d'objets éventuellement infini et/ou indéterminé (variable libre), mais vu comme un ensemble de méta-objets (simple, fixe, et extérieur au principal système étudié, comme dans la forme ensembliste d'une théorie quelconque). On parlera de “famille de...” pour préciser une classe d'arrivée, donc dire que son image est “un ensemble de...”.

Le formalisme des familles est celui des fonctions déguisé à la ressemblance de celui des uplets (inapplicable faute de disposer d'une infinité de symboles). Ainsi la notation u_i , semblant celle d'un symbole variable de variable, sert d'évaluation de u en i (abrégeant $u(i)$ ou $\pi_i(u)$). Une famille définie par un terme t , se note $(t(i))_{i \in I}$ au lieu de $(I \ni i \mapsto t(i))$ ou de $(t(0), \dots, t(n-1))$. L'argument i est appelé *indice*, et la famille est dite *indexée par I*. Une famille indexée par \mathbb{N} est appelée une *suite*.

Structures et symboles liant une variable

Les prédicats n -aires \mathcal{R} sont interprétables comme prédicats unaires \mathcal{R}_1 sur la classe des n -uplets $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$, par $\mathcal{R}_1(x) \Leftrightarrow \mathcal{R}(x_0, \dots, x_{n-1})$. Ainsi les classes n -aires sont des classes de n -uplets. Tout opérateur n -aire T se traduit en foncteur T_1 sur une classe de n -uplets: $T_1(x) = T(x_0, \dots, x_{n-1})$.

Remplaçant ces uplets par des familles, les symboles liants sont la généralisation des structures. Ainsi \forall et \exists généralisent les chaînes de \wedge et de \vee : $(B_0 \wedge \dots \wedge B_{n-1}) \Leftrightarrow (\forall i \in \mathcal{A}_n, B_i)$, rendant la condition d'égalité des couples $(x, y) = (z, t) \Leftrightarrow (x = z \wedge y = t)$ un cas particulier de celle des fonctions.

Soient \mathcal{R} un prédicat unaire valide sur E , et C un booléen. On a les distributivités

$$\begin{aligned}(C \wedge \exists x \in E, \mathcal{R}(x)) &\Leftrightarrow (\exists x \in E, C \wedge \mathcal{R}(x)) \\(C \vee \forall x \in E, \mathcal{R}(x)) &\Leftrightarrow (\forall x \in E, C \vee \mathcal{R}(x)) \\(C \Rightarrow \forall x \in E, \mathcal{R}(x)) &\Leftrightarrow (\forall x \in E, C \Rightarrow \mathcal{R}(x)) \\((\exists x \in E, \mathcal{R}(x)) \Rightarrow C) &\Leftrightarrow (\forall x \in E, \mathcal{R}(x) \Rightarrow C) \\(\exists x \in E, C) &\Leftrightarrow (C \wedge E \neq \emptyset) \Rightarrow C \Rightarrow (C \vee E = \emptyset) \Leftrightarrow (\forall x \in E, C)\end{aligned}$$

Ensembles finis, écriture extensive

Le foncteur Im , de domaine la classe des fonctions, se traduit en symbole liant ressemblant au symbole de compréhension et mixable avec celui-ci:

$$\begin{aligned}\{T(x)|x \in E\} &= \text{Im}(E \ni x \mapsto T(x)) \\ \{T(x)|x \in E \wedge \mathcal{R}(x)\} &= \{T(x)|x \in \{y \in E|\mathcal{R}(y)\}\}\end{aligned}$$

L'image d'un uplet (a, b, \dots) se note $\{a, b, \dots\}$, structure appelée l'*écriture extensive* de cet ensemble (qui énumère ses éléments). Ainsi l'ensemble \mathcal{A}_n s'écrit $\{0, \dots, n-1\}$. Ces images d'uplets sont des ensembles sont finis (la finitude sera formellement définie dans le texte 3).

On a déjà vu les cas d'arité 0 (\emptyset), 1 (singleton) et 2 (paire), dont les définitions (comme classe et comme domaine de quantificateur) traduisent celles de Im par traduction de \forall et \exists en \wedge et \vee .

2.2. Autres opérateurs sur les ensembles

Algèbre des parties, union et intersection d'une famille d'ensembles

Les connecteurs et les quantificateurs opérant entre booléens, définissent des opérations entre classes lorsque ces booléens dépendent d'une même variable libre. Et donc des opérations entre ensembles si ces classes sont des ensembles. Le résultat définit un ensemble s'il vaut faux pour un élément extérieur à tous les ensembles donnés. Lorsque ces ensembles sont des parties d'un ensemble E , le résultat peut se définir par compréhension dans E , mais reste indépendant de E .

C'est le cas de la constante 0 traduite par \emptyset , mais non du connecteur \neg .

On définit la différence $E \setminus F = \{x \in E | x \notin F\}$ de sorte que $x \in E \setminus F \Leftrightarrow x \in E \wedge x \notin F$.

Lorsqu'on étudie les parties d'un ensemble fixé E , la négation se traduit pour une partie F de E par $\complement_E F = E \setminus F$, appelé le *complémentaire de F dans E* : $\forall x \in E, x \in F \not\Leftrightarrow x \in \complement_E F$.

Les foncteurs sur les ensembles s'étendent aux familles grâce au foncteur Im . Ainsi se définissent l'union d'une famille d'ensembles, et l'intersection d'une famille non vide ($I \neq \emptyset$) d'ensembles:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in I} F_i &= \bigcup \{F_i | i \in I\} & \forall j \in I, \bigcap_{i \in I} F_i &= \{x \in F_j | \forall i \in I, x \in F_i\} \\ x \in \bigcup_{i \in I} F_i &\Leftrightarrow \exists i \in I, x \in F_i & x \in \bigcap_{i \in I} F_i &\Leftrightarrow \forall i \in I, x \in F_i \\ (\forall x \in \bigcup_{i \in I} F_i, \mathcal{R}(x)) &\Leftrightarrow \forall i \in I, \forall x \in F_i, \mathcal{R}(x) & A \cap B &= \{x \in A | x \in B\} \\ & & (\forall x \in A \cap B, \mathcal{R}(x)) &\Leftrightarrow (\forall x \in A, x \in B \Rightarrow \mathcal{R}(x)) \\ x \in A \cup B &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) & x \in A \cap B &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \\ A \subset A \cup B &= B \cup A & A \cap B &= B \cap A \subset A \\ A = A \cup B &\Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow B = A \cap B & (\exists x \in A, x \in B) &\Leftrightarrow (\exists x \in B, x \in A) \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset\end{aligned}$$

Pour une famille de parties F_i de E , $\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap \{F_i | i \in I\} = \{x \in E | \forall i \in I, x \in F_i\} = \complement_E \bigcup_{i \in I} \complement_E F_i$.
Fixant le choix de E , l'intersection ainsi définie de la famille vide donne E .

Deux ensembles A et B sont dits *disjoints* lorsque $A \cap B = \emptyset$.

La paire et l'union binaire suffisent à définir toute écriture extensive de plus grande arité.

Enfin le connecteur $\not\Leftrightarrow$ se traduit par la différence symétrique: $E \Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$.

L'union et l'intersection ont les mêmes propriétés d'associativité et de distributivité que \wedge et \vee :

$$\begin{aligned}A \cup B \cup C &= (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = \bigcup \{A, B, C\} \\ (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap C &= \bigcup_{i \in I} (A_i \cap C) & (\bigcap_{i \in I} A_i) \cup C &= \bigcap_{i \in I} (A_i \cup C) \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) & (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C)\end{aligned}$$

Produit fini

On appelle *graphe* tout ensemble de couples. On définit le produit (ou produit cartésien) $E \times F$ de deux ensembles E et F , comme l'ensemble des (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. De même, le produit de n ensembles $E_0 \times \dots \times E_{n-1}$ est l'ensemble des n -uplets (x_0, \dots, x_{n-1}) où $\forall i \in \mathcal{A}_n, x_i \in E_i$.

Un symbole L liant une variable x à un graphe G , joue le rôle de symbole liant deux variables y, z sur une structure $S(y, z)$, sous la forme $(Lx \in G, S(x_0, x_1))$ (interprétant S comme structure à un argument $x = (x_0, x_1) \in G$), qu'on notera par un couple de variables: $L(y, z) \in G, S(y, z)$.

L'existence du produit (en toute arité) se justifie par le principe de génération des ensembles:

$$\begin{aligned} (\exists(x, y) \in E \times F, \mathcal{R}(x, y)) &\Leftrightarrow (\exists x \in E, \exists y \in F, \mathcal{R}(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in F, \exists x \in E, \mathcal{R}(x, y)) \\ (\forall(x, y) \in E \times F, \mathcal{R}(x, y)) &\Leftrightarrow (\forall x \in E, \forall y \in F, \mathcal{R}(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in F, \forall x \in E, \mathcal{R}(x, y)). \\ &(\exists x \in E, \forall y \in F, \mathcal{R}(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E, \mathcal{R}(x, y)) \\ &((\exists x \in E, \mathcal{A}(x)) \vee (\exists x \in E, \mathcal{B}(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)) \\ &((\forall x \in E, \mathcal{A}(x)) \wedge (\forall x \in E, \mathcal{B}(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)) \\ &(\exists x \in E, C \vee \mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow ((C \wedge E \neq \emptyset) \vee \exists x \in E, \mathcal{A}(x)) \\ &(C \wedge \forall x \in E, \mathcal{A}(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, C \wedge \mathcal{A}(x)) \end{aligned}$$

On abrègera $\forall x \in E, \forall y \in E, \mathcal{R}(x, y)$ en $\forall x, y \in E, \mathcal{R}(x, y)$, et de même pour \exists .

Une opération n -aire est une fonction de domaine un produit de n ensembles. De même le rôle des relations n -aires est joué par les parties du produit des n ensembles, qui sont des ensembles de n -uplets. Ainsi les graphes $G \subset E \times F$ jouent le rôle des relation binaires entre E et F . (Cette représentation des relations a le défaut d'oublier les domaines E et F ; ceux-ci sont souvent déjà fixés par ailleurs, mais on peut les ajouter en prenant le triplet (E, F, G) .)

Somme ou union disjointe

La curryfication convertit tout graphe R en foncteur \vec{R} arrivant parmi les ensembles. Inversement, la somme (ou union disjointe) d'une famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$, la reconvertit en graphe (décurryfie):

$$\begin{aligned} (x, y) \in R &\Leftrightarrow y \in \vec{R}(x) = \{z_1 | z \in R \wedge z_0 = x\} \\ (i \in I \wedge x \in E_i) &\Leftrightarrow (i, x) \in \coprod_{i \in I} E_i = \bigcup_{i \in I} \{(i, x) | x \in E_i\} \end{aligned}$$

On définit le graphe d'une fonction f par $\text{Gr } f = \{(x, f(x)) | x \in \text{Dom } f\} = \coprod_{x \in \text{Dom } f} \{f(x)\}$.

Les notions de domaine et d'image s'étendent aux graphes ($\text{Dom } f = \text{Dom}(\text{Gr } f)$ et $\text{Im } f = \text{Im}(\text{Gr } f)$):

$$\begin{aligned} \vec{R}(x) \neq \emptyset &\Leftrightarrow x \in \text{Dom } R = \{y_0 | y \in R\} \\ R = \coprod_{i \in I} E_i &\Leftrightarrow (\text{Dom } R \subset I \wedge \forall i \in I, \vec{R}(i) = E_i) \Rightarrow ((\forall x \in R, A(x)) \Leftrightarrow (\forall i \in I, \forall y \in E_i, A(i, y))) \end{aligned}$$

$$\text{Dom } R \subset I \Leftrightarrow \left(R = \coprod_{i \in I} \vec{R}(i) \right) \Rightarrow \left(\text{Im } R = \{x_1 | x \in R\} = \bigcup_{i \in I} \vec{R}(i) \right)$$

$$E \times F = \coprod_{x \in E} F$$

$$R \subset E \times F \Leftrightarrow (\text{Dom } R \subset E \wedge \text{Im } R \subset F)$$

$$E_0 \sqcup \dots \sqcup E_{n-1} = \coprod_{i \in \mathcal{A}_n} E_i$$

$$E \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times E$$

$$(E \subset E' \wedge F \subset F') \Rightarrow E \times F \subset E' \times F'$$

$$(\forall i \in I, E_i \subset E'_i) \Rightarrow \coprod_{i \in I} E_i \subset \coprod_{i \in I} E'_i.$$

2.3. Quantificateur d'unicité, graphes de fonctions

Pour tous ensembles $F \subset E$, tout prédicat unaire \mathcal{A} valide sur E , et tout $x \in E$,

$$x \in F \Leftrightarrow \{x\} \subset F \Leftrightarrow (\exists y \in E, x = y \wedge y \in F) \Leftrightarrow (\forall y \in E, x = y \Rightarrow y \in F)$$

$$x \in F \Rightarrow ((\forall y \in F, \mathcal{A}(y)) \Rightarrow \mathcal{A}(x) \Rightarrow \exists y \in F, \mathcal{A}(y))$$

$$F \subset \{x\} \Leftrightarrow (\forall y \in F, x = y) \Rightarrow ((\exists y \in F, \mathcal{A}(y)) \Rightarrow \mathcal{A}(x) \Rightarrow (\forall y \in F, \mathcal{A}(y)))$$

$$F = \{x\} \Leftrightarrow (x \in F \wedge \forall y \in F, x = y) \Leftrightarrow (\forall y \in E, y \in F \Leftrightarrow x = y)$$

Voici 3 nouveaux quantificateurs: $\exists 2$ (pluralité), $!$ (unicité), et $\exists!$ (“il existe un unique...”), qui appliqués à \mathcal{R} dans E ne dépendent que de $F = \{x \in E, \mathcal{R}(x)\}$ (comme \exists et contrairement à \forall) :

$$\begin{aligned}
(\exists x \in E, \mathcal{R}(x)) &\Leftrightarrow (F \neq \emptyset) \Leftrightarrow (\exists x \in F, 1) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \{x\} \subset F) \\
(\exists 2x \in E, \mathcal{R}(x)) &\Leftrightarrow (\exists 2 : F) \Leftrightarrow (\exists x, y \in F, x \neq y) \Leftrightarrow (\exists x, y \in E, \mathcal{R}(x) \wedge \mathcal{R}(y) \wedge x \neq y) \\
(!x \in E, \mathcal{R}(x)) &\Leftrightarrow (! : F) \Leftrightarrow \neg(\exists 2 : F) \Leftrightarrow (\forall x, y \in F, x = y) \Leftrightarrow \forall x \in F, F \subset \{x\} \\
(\exists!x \in E, \mathcal{R}(x)) &\Leftrightarrow (\exists! : F) \Leftrightarrow (\exists x \in F, F \subset \{x\}) \Leftrightarrow (\exists x \in E, F = \{x\}) \\
F \subset \{x\} &\Rightarrow \forall y \in F, F \subset \{y\} \Leftrightarrow (! : F) \\
(\exists! : F) &\Leftrightarrow (F \neq \emptyset \wedge ! : F) \\
F \neq \emptyset &\Rightarrow ((\forall y \in F, \mathcal{A}(y)) \Rightarrow (\exists y \in F, \mathcal{A}(y))) \\
(! : F) &\Rightarrow ((\exists y \in F, \mathcal{A}(y)) \Rightarrow (\forall y \in F, \mathcal{A}(y))) \\
F = \{x\} &\Rightarrow ((\exists y \in F, \mathcal{A}(y)) \Leftrightarrow \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \forall y \in F, \mathcal{A}(y))
\end{aligned}$$

Une fonction f est dite *constante* lorsque $(! : \text{Im } f)$. La constance d'un uplet est la chaîne d'égalités: $x = y = z \Leftrightarrow ! : \{x, y, z\} \Leftrightarrow ((x = y) \wedge (y = z)) \Rightarrow x = z$.

Traduction des opérateurs en prédicats

Dans une théorie générique, tout symbole de foncteur T (et de même tout opérateur par application à un uplet) est remplaçable par un symbole de prédicat R (désignant $x, y \mapsto (y = T(x))$) muni de l'axiome $\forall x, \exists!y, xRy$. Ce remplacement n'est pas applicable aux termes mais seulement aux formules: pour tout prédicat unaire A et tout terme x , on traduit $A(T(x))$ par $(\exists y, xRy \wedge A(y))$, ou par $(\forall y, xRy \Rightarrow A(y))$.

Inversement, pour tout prédicat R tel que $\forall x, \exists!y, xRy$ (où x joue le rôle de paramètre remplaçable par un uplet), on peut considérer comme implicitement présent puis formellement introduire un symbole d'opérateur T tel que $\forall x, y, T(x) = y \Leftrightarrow xRy$ (traduisible par R dans toute formule).

Cela n'est pas possible en théorie des ensembles sans détruire la distinction entre énoncé et formule. Par contre, on peut introduire un nouvel opérateur ϵ , valide sur la classe $(\text{Ens}(E) \wedge \exists! : E)$ des singletons, pour en extraire l'élément. Inexprimable comme terme par les outils précédents, il se définit par les axiomes équivalents: $(\forall x, \epsilon\{x\} = x)$, et $(\forall_{\text{Ens } E}, \exists! : E \Rightarrow \epsilon E \in E)$.

Pour tout prédicat unaire A on a alors $A(\epsilon(E)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, A(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, A(x))$.

Opérateur conditionnel

Comme le connecteur conditionnel, l'*opérateur conditionnel*, (en fait para-opérateur) d'arguments un booléen A et deux objets x, y , donne x si A est vrai et y sinon:

$$(A \rightarrow x|y) = (y, x)(A) = \epsilon\{z \in \{x, y\} | A \rightarrow z = x | z = y\}$$

de sorte que pour tout prédicat \mathcal{R} , $\mathcal{R}(A \rightarrow x|y) \Leftrightarrow (A \rightarrow \mathcal{R}(x)|\mathcal{R}(y))$. Combiné à des structures, il est le moyen naturel de définir tout autre para-opérateur structurant (comme celui traduisant les booléens en objets), rendant inutile l'inscription directe de ceux-ci au langage d'une théorie.

Graphes fonctionnels

Pour tout graphe $G \subset E \times F$ on a $(\forall x \in E, ! : \overrightarrow{G}(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, !y \in F, (x, y) \in G) \Leftrightarrow (\forall x \in \text{Dom } G, \exists!y \in F, (x, y) \in G) \Leftrightarrow (\forall x, y \in G, x_0 = y_0 \Rightarrow x_1 = y_1)$. Un tel graphe est dit *fonctionnel*. Ce sont les graphes des fonctions, qui les représentent: tout graphe fonctionnel G est le graphe de l'unique fonction $f = ((\text{Dom } G) \ni x \mapsto \epsilon \overrightarrow{G}(x))$ (ou $f = \epsilon \overrightarrow{G}$ en abrégé).

Pour tout ensemble F , $\text{Im } f \subset F \Leftrightarrow \text{Gr } f \subset E \times F \Leftrightarrow \text{Gr } f = \{(x, y) \in E \times F | y = f(x)\}$.

Pour toute fonction f de E dans F et tout $R \subset E \times F$ on a

$$\begin{aligned}
\text{Gr}(f) \subset R &\Leftrightarrow \forall x \in E, (x, f(x)) \in R \\
\text{Gr}(f) = R &\Leftrightarrow \forall x \in E, \{f(x)\} = \overrightarrow{R}(x).
\end{aligned}$$

Pour toutes fonctions f, g on a $(\text{Dom } f = \text{Dom } g \wedge \text{Gr}(f) \subset \text{Gr}(g)) \Leftrightarrow f = g$.

Remarque: réciproquement, s'il existe une unique fonction f de E dans F telle que $\text{Gr}(f) \subset R$ alors $\text{Gr } f = R$. En effet, $\text{Gr}(f) \subset R \Rightarrow \forall (x, y) \in R, \text{Gr}(x' \mapsto (x = x' \rightarrow y | f(x'))) \subset R$, donc $f = (x' \mapsto (x = x' \rightarrow y, f(x')))$, donc $y = f(x)$. Finalement $\text{Gr}(f) = R$. \square

2.4. Ensembles des parties, produit et puissance

Introduisons trois nouveaux opérateurs désignant comme ensembles certaines classes. Chaque tel opérateur T est donc muni d'un axiome spécifiant la classe \mathcal{R} équivalente à l'ensemble désigné: sous-entendant les arguments, $\forall x, x \in T \Leftrightarrow \mathcal{R}(x)$.

Cela ressemble aux usages du principe de génération des ensembles, mais ce n'en sera pas, les quantificateurs sur ces classes n'étant pas traduisibles en énoncés ensemblistes.

L'approche traditionnelle des théories axiomatiques se contente de les formaliser comme axiomes $\exists K, \forall x, x \in K \Leftrightarrow \mathcal{R}(x)$, laissant la désignation de ces ensembles n'être qu'un emploi implicite de leur caractérisation ($\forall x, x \in K \Leftrightarrow \mathcal{R}(x)$) dans les énoncés, suivant la procédure évoquée au 2.1.

Mais ce n'est là qu'un énoncé, a priori intraduisible en formule ensembliste: l'implication s'écrit ($\forall x \in K, \mathcal{R}(x)$), mais la réciproque laisse un \forall ouvert irréductible, $\forall x, \mathcal{R}(x) \Rightarrow x \in K$. Faute d'énoncé ensembliste équivalent, ces axiomes d'existence sont inutilisables dans notre théorie des ensembles. La présentation comme opérateurs supplémentaires munis d'axiomes est nécessaire.

Ensemble des parties. Pour tout ensemble E , on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E : pour tout F ,

$$F \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\text{Ens}(F) \wedge F \subset E)$$

Ensemble puissance. Pour tous ensembles E et F , on note F^E l'ensemble des fonctions de E dans F : pour tout f ,

$$f \in F^E \Leftrightarrow (\text{App}(f) \wedge \text{Dom } f = E \wedge \text{Im } f \subset F)$$

Produit d'une famille d'ensembles. L'opérateur unaire de produit d'une famille d'ensembles, généralisation du produit de n ensembles, se présente comme symbole liant:

$$\forall x, x \in \prod_{i \in I} E_i \Leftrightarrow (\text{App}(x) \wedge \text{Dom } x = I \wedge \forall i \in I, x_i \in E_i).$$

Pour chaque symbole liant, l'usage d'un $\mathcal{P}(\dots)$ comme domaine sera abrégé en remplaçant \in par \subset . Ainsi $(\forall A \subset E, \dots)$ signifie $(\forall A \in \mathcal{P}(E), \dots)$.

Ces trois opérateurs sont "équivalents", en ce sens qu'ils sont définissables les uns par les autres:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &= \{\{x \in E \mid f(x) = 1\} \mid f \in \{1, 2\}^E\} \\ F^E &= \prod_{x \in E} F = \{\epsilon \vec{R} \mid R \subset E \times F \wedge \forall x \in E, \exists ! : \vec{R}(x)\} \\ \prod_{i \in I} E_i &= \{x \in (\bigcup_{i \in I} E_i)^I \mid \forall i \in I, x_i \in E_i\} = \{\epsilon \vec{R} \mid R \subset \prod_{i \in I} E_i \wedge \forall x \in E, \exists ! : \vec{R}(x)\} \end{aligned}$$

Même certains cas sont exprimables au moyen des outils précédents:

$$\begin{aligned} (\exists i \in I, E_i = \emptyset) &\Rightarrow \prod_{i \in I} E_i = \emptyset \\ (\forall i \in I, \exists ! : E_i) &\Rightarrow \prod_{i \in I} E_i = \{(\epsilon E_i)_{i \in I}\} \\ F^\emptyset &= \{\emptyset\} \\ F^{\{a\}} &= \{\{a\} \ni x \mapsto y \mid y \in F\}, \quad \mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\} \\ F^{E \cup E'} &= \{(E \cup E') \ni x \mapsto (x \in E \rightarrow f(x) \mid g(x)) \mid (f, g) \in F^E \times F^{E'}\} \end{aligned}$$

et de même on peut formuler $\prod_{i \in I \cup J} E_i$.

Pour tout $i \in I$ on appelle *i-ième projection*, la fonction π_i de $\prod_{i \in I} E_i$ dans E_i qui évalue toute famille x en i : $\pi_i(x) = x_i$. C'est l'évaluateur de fonction vu comme curryfié dans l'ordre inhabituel.

Si $F \subset F'$ alors $F^E \subset F'^E$, $\mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(F')$, et

$$(\forall i \in I, E_i \subset E'_i) \Rightarrow \prod_{i \in I} E_i \subset \prod_{i \in I} E'_i$$

Pour une théorie des ensembles capable de fonder les mathématiques (définir les concepts tant des mathématiques courantes que du cycle fondateur principal), ces opérateurs sont indispensables, déjà

pour pouvoir définir la finitude (sinon, seuls seraient connus comme finis les ensembles de cardinal limité par un nombre plus ou moins explicite). Puis il restera à poser l'axiome "Il existe un ensemble infini" (d'ailleurs formulable par un autre critère d'ensemble clairement infini). C'est en effet sur les ensembles infinis que \mathcal{P} prendra toute sa force (les produits finis étant déjà donnés avant): construction de \mathbb{N} et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (un quantificateur sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est déjà nécessaire pour définir \mathbb{N}) et par là de \mathbb{R} ; principe de définition des suites par récurrence.

Certes, l'utilité de ces montages finit par s'essouffler: après quelques $\forall X \subset \mathbb{R}$ ou $\forall X \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (pour des buts souvent réalisables autrement avec un peu plus de peine), ce qui vient ensuite ($\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$) et au-delà n'a plus d'utilité pratique. On pourrait alors se limiter à ces premiers cas, sauf qu'une telle distinction compliquerait inutilement un exposé déjà assez difficile des fondements des mathématiques. Pour partir des fondements les plus simples possibles, comme d'ailleurs suivant la tradition ZF, nous acceptons ces opérateurs dans leur intégralité.

Ils apportent une forte contrainte sur l'univers (on pense qu'ils n'entraînent pas de contradiction, bien qu'il soit impossible de le démontrer). Mais pour chaque E , cette exigence que $\mathcal{P}(E)$ contienne toutes les parties de E , reste relative à l'étendue de la classe des parties de E présentes dans notre univers, indéterminée par ailleurs. Cela n'exprime finalement qu'une relation entre $\mathcal{P}(E)$ et l'univers.

On peut toujours oublier cette dépendance de $\mathcal{P}(E)$ vis-à-vis de l'univers, en imaginant celui-ci suffisamment grand pour contenir "vraiment" toutes les parties de E , et par là, le "vrai" $\mathcal{P}(E)$. Mais rien ne peut exprimer d'interdiction qu'il existe ailleurs, dans un autre univers plus grand, d'autres parties de E hors de notre $\mathcal{P}(E)$. Cet autre univers peut aussi avoir un opérateur \mathcal{P} , mais son interprétation de $\mathcal{P}(E)$ pourra différer de la nôtre pour le même E . Ces jeux de Grandes Illusions sur ces opérateurs jouent un rôle crucial à l'origine de bien des paradoxes des fondements des mathématiques. Ces opérateurs rapportent ainsi en formules ensemblistes sur des objets donnés, des indécidabilités qui sinon ne seraient que celles d'énoncés (liées au flou sur l'étendue de l'univers); D'où l'intérêt de systèmes axiomatiques les plus forts possibles aidant à enrichir des ensembles donnés (comme \mathbb{N}) de parties qui pourraient être ignorées d'univers moins puissants; et donc à lever certaines de ces indécidabilités.

2.5. Injections, surjections, bijections canoniques

Injections, surjections, bijections

Pour tout $f \in F^E$ et tout y on notera $f^\bullet(y) = \{x \in E \mid f(x) = y\}$, et $f_F^\bullet = (F \ni z \mapsto f^\bullet(z))$.

Lemme et définition. Une fonction f est dite *injective* (ou : une *injection*) si elle satisfait les conditions équivalentes où $E = \text{Dom } f$ et $\text{Im } f \subset F$:

$$\begin{aligned} \forall x, x' \in E, x \neq x' &\Rightarrow f(x) \neq f(x') \\ \forall x, x' \in E, f(x) = f(x') &\Rightarrow x = x' \\ \forall y \in F, ! : f^\bullet(y) & \end{aligned}$$

La première équivalence est évidente; la deuxième se vérifie ainsi (par $f(x) \in F$):

$$\begin{aligned} \forall y \in F, !x \in E, f(x) = y &\Leftrightarrow \forall y \in F, \forall x, x' \in E, (f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x' \\ &\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, \forall y \in F, f(x) = y \Rightarrow (f(x') = y \Rightarrow x = x') \\ &\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

Définition. On dit qu'une fonction de E dans F est *surjective* (ou une *surjection*) lorsque $\text{Im } f = F$.

Ce n'est donc pas une propriété de f seul mais qui dépend d'un ensemble d'arrivée F donné. On dit aussi une surjection de E sur F .

Définition. Une fonction bijective (ou *bijection*) de E sur F est une fonction f injective et surjective de E sur F , autrement dit $\forall y \in F, \exists ! : f^\bullet(y)$.

Une bijection d'un ensemble sur lui-même s'appelle une *permutation* (on dit aussi une *transformation* pour un espace géométrique).

Définition. L'inverse de toute injection f est $f^{-1} = (\text{Im } f \ni y \mapsto \epsilon f^\bullet(y))$ (bijective sur $\text{Dom } f$).

Identité, composition et restriction

Pour tout ensemble E on appelle *identité sur E* la fonction $\text{Id}_E = (E \ni x \mapsto x) \in E^E$ aussi appelée *injection canonique* de E dans tout ensemble englobant E .

On définit les compositions de fonctions f, g, h par

$$\text{Im } f \subset \text{Dom } g \Rightarrow g \circ f = (\text{Dom } f \ni x \mapsto g(f(x)))$$

$$\text{Im } f \subset \text{Dom } g \wedge \text{Im } g \subset \text{Dom } h \Rightarrow h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = (\text{Dom } f \ni x \mapsto h(g(f(x)))).$$

Pour toute fonction $f \in F^E$ et $A \subset E$, on appelle *restriction de f à A* la fonction

$$f|_A = (A \ni x \mapsto f(x)) = f \circ \text{Id}_A \in F^A.$$

Bijections canoniques: généralités

On appelle *bijection canonique* entre deux ensembles E et F , une bijection obtenue par restriction à E d'un opérateur unaire invariant (de définition souvent simple). L'existence d'une telle bijection sera notée $E \simeq F$. Ce méta-énoncé $E \simeq F$ ne fait donc que sous-entendre une expression de définition d'une bijection qu'il faut réexpliquer pour obtenir un travail effectif de théorie des ensembles.

Si $E \simeq F$ et $F \simeq G$ alors $E \simeq G$ par composition des expressions des opérateurs unaires.

Les bijections canoniques ressembleront souvent à des identités remarquables sur les opérations entre entiers, car sur les ensembles finis elles donnent l'égalité des cardinaux.

Des bijections canoniques en engendrent d'autres entre des ensembles construits à partir des précédents, par exemple $(E \simeq E' \wedge F \simeq F') \Rightarrow E \times F \simeq E' \times F'$ d'où, par les graphes, $F^E \simeq F'^{E'}$.

Une bijection canonique sera dite *bicanonique* si son inverse est aussi canonique. Cela n'est pas possible lorsque l'opérateur unaire invariant utilisé n'est pas injectif. Par exemple $E \times \{x\} \simeq E^{\{x\}}$ n'est bicanonique que si $E \neq \emptyset$, tandis que $\{x\}^E \simeq \{x\}$ et $E \times \{x\} \simeq E$ ne le sont généralement pas. Seulement, notant comme des chiffres des constantes invariantes comme $0 = \emptyset$ et $1 = \{\emptyset\}$, on a $E \simeq E \times \{0\}$, $E \simeq E^{\{0\}} \wedge \{0, 1\}^E \simeq \mathcal{P}(E)$ bicanoniques.

Somme de fonctions ou décurryfication

La somme des familles d'ensembles définit des bijections canoniques, d'inverse $R \mapsto \vec{R}$ non canonique par indétermination de $\text{Dom } \vec{R}$ (sauf à admettre E comme paramètre):

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(F))^E &\simeq \mathcal{P}(E \times F) \quad (\simeq \{0, 1\}^{E \times F}) \\ \prod_{x \in E} \mathcal{P}(F_x) &\simeq \mathcal{P}\left(\prod_{x \in E} F_x\right) \\ \text{Dom } R \subset E &\Rightarrow \prod_{x \in E} \mathcal{P}(\vec{R}(x)) \simeq \mathcal{P}(R) \end{aligned}$$

On définit la somme de toute famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions, notant $E_i = \text{Dom } f_i$ et $S = \prod_{i \in I} E_i$:

$$\begin{aligned} (f_i)_{i \in I} &\mapsto \prod_{i \in I} f_i = (S \ni (i, x) \mapsto f_i(x)) = f \\ \forall i \in I, f_i &= f \circ j_i \quad \text{où } j_i = (E_i \ni x \mapsto (i, x)) \in S^{E_i} \end{aligned}$$

Cela définit des bijections canoniques (bicanoniques si $\forall i \in I, E_i \neq \emptyset$, sinon en fixant I):

$$\begin{aligned} (F^E)^I &\simeq F^{I \times E} \\ \prod_{i \in I} F^{E_i} &\simeq F^S \quad \text{où } S = \prod_{i \in I} E_i \\ \prod_{i \in I} \prod_{x \in E_i} F_{(i, x)} &\simeq \prod_{c \in S} F_c \\ (E \times F) \times G &\simeq E \times F \times G \end{aligned}$$

Transposition

Une transposition sur un ensemble est une permutation de cet ensemble qui échange deux éléments et laisse fixe les autres. Sur toute paire il existe une unique transposition.

L'emploi de la transposition sur le domaine des couples définit l'opérateur unaire σ sur la classe des couples: $\sigma(x, y) = (y, x)$. Pour tout couple z on a $\sigma(\sigma(z)) = z$.

Il en résulte les bijections canoniques: $E \times F \simeq F \times E$, et $G^{E \times F} \simeq G^{F \times E}$. Ainsi, pour toute opération $f \in G^{E \times F}$ on appelle *transposée de f* l'opération ${}^t f = ((x, y) \ni F \times E \mapsto f(y, x)) \in G^{F \times E}$.

De même, $\mathcal{P}(E \times F) \simeq \mathcal{P}(F \times E)$ par ${}^t R = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$.

Produit de fonctions ou recurryfication

Les graphes peuvent se curryfier en sens contraire: $\overleftarrow{R} = \overrightarrow{{}^t R}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(F))^E &\simeq \mathcal{P}(E \times F) \simeq (\mathcal{P}(E))^F \\ \overrightarrow{R} &\mapsto \overleftarrow{R} = (F \ni y \mapsto \{x \in E | y \in \overrightarrow{R}(x)\}) \\ x \in \overleftarrow{R}(y) &\Leftrightarrow y \in \overrightarrow{R}(x). \end{aligned}$$

Pour toute famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions de même domaine E , on définit son produit par

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} f_i &= (E \ni x \mapsto (f_i(x))_{i \in I}) \\ h &= \prod_{i \in I} f_i \Leftrightarrow \text{Dom } h = E \wedge \forall i \in I, f_i = \pi_i \circ h \\ (F^E)^I &\simeq (F^I)^E \\ \prod_{i \in I} (F_i^E) &\simeq (\prod_{i \in I} F_i)^E \\ \text{Dom } f = \text{Dom } g = E &\Rightarrow f \times g = (E \ni x \mapsto (f(x), g(x))) \\ I^E \times F^E &\simeq (I \times F)^E \\ \prod_{\phi \in I^E} \prod_{x \in E} F_{\phi(x)} &\simeq (\prod_{i \in I} F_i)^E. \end{aligned}$$

2.6. Autres propriétés des fonctions

Image directe, image réciproque

On appelle *image réciproque* d'un ensemble B par une fonction f l'ensemble

$$f^*(B) = \{x \in \text{Dom } f | f(x) \in B\}.$$

Fixant un ensemble d'arrivée F de f , on verra f^* comme fonction de domaine $\mathcal{P}(F)$.

On a $f^\bullet(y) = f^*(\{y\})$.

Si $A \subset B \subset F$ alors $f^*(A) \subset f^*(B)$ et $f^*(\mathcal{C}_F A) = \mathcal{C}_E f^*(A)$. Pour toute famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$,

$$\begin{aligned} f^*\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f^*(A_i) \\ f^*\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &= \bigcap_{i \in I} f^*(A_i). \end{aligned}$$

Soit maintenant un ensemble $A \subset E$. On appelle *image directe de A par f* et on note $f[A]$ l'ensemble

$$f[A] = \text{Im}(f|_A) = \{f(x) | x \in A\} = \{y \in F | \exists x \in A, y = f(x)\} \subset \text{Im } f \subset F.$$

(Cette notation $f[A]$, évitant l'ambiguïté de la notation classique $f(A)$, est tirée du Wikipedia anglophone.) C'est une surjection $f|_{\square}$ de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{P}(\text{Im } f)$ car $\forall B \subset \text{Im } f, f[f^*(B)] = B$.

Pour tous $A \subset B \subset E$ on a $f[A] \subset f[B]$. Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E ,

$$\begin{aligned} f\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right] &= \bigcup_{i \in I} f[A_i] \\ f\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] &\subset \bigcap_{i \in I} f[A_i] \quad \text{avec égalité si } f \text{ injective et } I \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Proposition. Soient deux fonctions $f \in F^E$ et $g \in G^F$. On a :

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
3. $\text{Im}(g \circ f) = g[\text{Im } f] \subset \text{Im } g$
4. Si f est surjective (i.e. $\text{Im } f = F$) alors $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.
5. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective (i.e. $\text{Im}(g \circ f) = G$).
6. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
7. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.

Preuves:

1. Si f et g sont injectives, $\forall x, y \in E, g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
 2. $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow x = y$.
 3. $\forall z \in G, z \in \text{Im}(g \circ f) \Leftrightarrow (\exists x \in E, g(f(x)) = z) \Leftrightarrow (\exists y \in \text{Im } f, g(y) = z) \Leftrightarrow z \in g[\text{Im } f]$.
- Puis, 3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 5. puis 3. \Rightarrow 6. puis (1. \wedge 5.) \Rightarrow 7.

Propriétés de la fonction inverse

Soient E et F deux ensembles, $f \in F^E$ et $g \in E^F$. Alors on a équivalence entre

- 1) $g \circ f = \text{Id}_E$
- 2) $\forall x \in E, \forall y \in F, f(x) = y \Rightarrow g(y) = x$
- 3) $\text{Gr } f \subset {}^t\text{Gr } g$.
- 4) $\forall y \in F, f^\bullet(y) \subset \{g(y)\}$
- 5) $\forall x \in E, f(x) \in g^\bullet(x)$
- 6) f est injective et $g|_{\text{Im } f} = f^{-1}$

De même en combinant ces énoncés avec ceux où on échange f et g : on a équivalence entre

- 1) $g \circ f = \text{Id}_E \wedge f \circ g = \text{Id}_F$.
- 2) $\forall x \in E, \forall y \in F, f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$
- 3) $\text{Gr } g = {}^t\text{Gr } f$.
- 4) $\forall y \in F, f^\bullet(y) = \{g(y)\}$
- 5) $\forall x \in E, \{f(x)\} = g^\bullet(x)$
- 6) f est bijective et $g = f^{-1}$

On a $(f^{-1})^{-1} = f$. D'après les propriétés des graphes de fonctions,

$$\forall f \in F^E, \quad f \text{ bijective} \Leftrightarrow (\exists g \in E^F, \text{Gr } g = {}^t\text{Gr } f) \Leftrightarrow (\exists! g \in E^F, \text{Gr } g \subset {}^t\text{Gr } f).$$

Proposition. Soient deux ensembles E et F et trois fonctions $f, h \in F^E, g \in E^F$ telles que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $h \circ g = \text{Id}_F$. Alors $f = h$, de sorte que $g = f^{-1}$.

Preuve: $\forall x \in E, f(x) = h(g(f(x))) = h(x)$. Autre méthode: $\text{Gr } f \subset {}^t\text{Gr } g \subset \text{Gr } h$.

Proposition. Soient deux fonctions $f \in F^E$ et $g \in G^F$ bijectives. Alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

On peut écrire la preuve

$$\forall x \in E, \forall y \in G, g \circ f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = g^{-1}(y) \Leftrightarrow x = f^{-1} \circ g^{-1}(y)$$

ou encore $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1} = \text{Id}_G$, et de même $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{Id}_E$.

Propriétés de la composition

Théorème. Soient trois ensembles E, F, G , soit $f \in F^E$, et soit $\phi = (G^F \ni g \mapsto g \circ f)$ la fonction de composition à droite par f , arrivant dans G^E . On a alors:

- 1) Si f est surjective alors ϕ est injective
- 2) Si f est injective et $G \neq \emptyset$ alors ϕ est surjective
- 3) Si ϕ est surjective et $\exists 2 : G$ alors f est injective.
- 4) Si ϕ est injective et $\exists 2 : G$ alors f est surjective.

Preuves:

- 1) $\forall g, h \in G^F, \phi(g) = \phi(h) \Leftrightarrow (\forall x \in E, g(f(x)) = h(f(x)) \Leftrightarrow \forall y \in F, g(y) = h(y) \Leftrightarrow g = h$.
- 2) Soient $h \in G^E$ et $z \in G$. Alors, f étant injective, $\phi(F \ni y \mapsto (y \in \text{Im } f \rightarrow h \circ f^{-1}(y)|z)) = h$.
- 3) Soient $z \neq z' \in G$. Alors $\forall x \in E, \exists g \in G^F, \forall y \in E, g(f(y)) = (y = x \rightarrow z|z')$, donc $f(y) = f(x) \Rightarrow g(f(y)) = g(f(x)) = z \Rightarrow y = x$.
- 4) $\phi(y \mapsto z) = \phi(y \mapsto (y \in \text{Im } f \rightarrow z|z')) \Rightarrow (\forall y \in F, (y \in \text{Im } f \vee z = z')) \Rightarrow \text{Im } f = F$.

Corrolaire 1. Si $G \neq \emptyset$ et $E \subset F$, l'application $G^F \ni g \mapsto g|_E$ est surjective sur G^E .

Corrolaire 2. Soit une injection $f \in F^E$ où $E \neq \emptyset$, alors $\exists g \in E^F, g \circ f = \text{Id}_E$.

Corrolaire 3. Soient deux ensembles E, F , soit $f \in F^E$, et considérons f^* comme fonction de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$. Alors on a (f injective $\Leftrightarrow f^*$ surjective), et (f surjective $\Leftrightarrow f^*$ injective).

Théorème. Soient trois ensembles E, F, G , soit $g \in G^F$, et soit $\psi = (F^E \ni f \mapsto g \circ f)$ la fonction de composition à gauche par g , arrivant dans G^E . On a alors:

- 1) Si g est injective alors ψ est injective
- 2) (Si g est surjective alors ψ est surjective) est une expression de l'axiome du choix.
- 3) Si ψ est injective et $E \neq \emptyset$ alors g est injective.
- 4) Si ψ est surjective et $E \neq \emptyset$ alors g est surjective.

Preuves:

- 1) $\forall f, f' \in F^E, \psi(f) = \psi(f') \Leftrightarrow \forall x \in E, g(f(x)) = g(f'(x)) \Rightarrow \forall x \in E, f(x) = f'(x) \Rightarrow f = f'$.
- 2) sera étudié avec l'axiome du choix.
- 3) $\forall y, y' \in F, g(y) = g(y') \Rightarrow \psi(x \mapsto y) = \psi(x \mapsto y') \Rightarrow (\forall x \in E, y = y') \Rightarrow y = y'$ car $E \neq \emptyset$.
- 4) $\forall z \in G, \exists f \in F^E, g \circ f = (x \mapsto z)$ donc $E \neq \emptyset \Rightarrow z \in \text{Im } g$.

Proposition. Soient $f \in F^E, g \in E^F$ tels que $g \circ f = \text{Id}_E$. Alors f est injective, g est surjective, et on a les équivalences : (f surjective) \Leftrightarrow (g injective) $\Leftrightarrow f \circ g = \text{Id}_F$.

Preuve:

Les premiers résultats découlent de l'injectivité et la surjectivité de $\text{Id}_E = g \circ f$.

De $f \circ g = \text{Id}_F$ on tire les résultats analogues en échangeant f et g .

Si f est surjective alors $f \circ g \circ f = f \Rightarrow f \circ g = \text{Id}_F$

Si g est injective alors $g \circ f \circ g = g \Rightarrow f \circ g = \text{Id}_F$. □

En particulier, si f ou g est bijective et $g \circ f = \text{Id}_E$ alors f et g sont l'inverse l'un de l'autre.

Points fixes; fonctions idempotentes

Définition. Etant donnée une fonction f d'un ensemble E dans lui-même, on dit qu'un élément $x \in E$ est un point fixe de f ssi $f(x) = x$. L'ensemble des points fixes de f sera noté $\text{Fix } f$.

Définition. Une fonction f d'un ensemble dans lui-même est dite idempotente ssi $f \circ f = f$.

Pour tous ensembles E et F , tous $f \in F^E$ et $g \in F^F$,

$$\begin{aligned} \text{Fix } g &\subset \text{Im } g \\ g \circ f = f &\Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Fix } g \\ g \circ g = g &\Leftrightarrow \text{Im } g = \text{Fix } g \end{aligned}$$

2.7. Quelques propriétés des relations binaires sur un ensemble.

On appelle *relation binaire sur un ensemble E* , une relation dont les 2 arguments sont de domaine E , autrement dit $R \subset E \times E$. Nous noterons ici $x R y$ au lieu de $(x, y) \in R$.

Une relation binaire R sur un ensemble E est dite:

- *réflexive* ssi $\forall x \in E, x R x$
- *antiréflexive* ssi $\forall x \in E, \neg(x R x)$
- *symétrique* ssi $\forall x, y \in E, x R y \Rightarrow y R x$
- *antisymétrique* ssi $\forall x, y \in E, (x R y \wedge y R x) \Rightarrow x = y$.
- *transitive* ssi $\forall x, y, z \in E, (x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z$

Toute relation binaire transitive et antiréflexive est antisymétrique.

Relation de préordre. On appelle préordre toute relation binaire réflexive et transitive. Un ensemble muni d'une relation de préordre est dit un ensemble préordonné.

Relation d'ordre. On appelle ordre tout préordre antisymétrique. Un ensemble muni d'un ordre est appelé un ensemble ordonné.

Relation d'équivalence. On nomme ainsi tout préordre symétrique.

Sous-entendons les quantificateurs comme portant sur E dans la proposition suivante.

Proposition. 1) Si R est un préordre alors $x R y \Leftrightarrow \overleftarrow{R}(x) \subset \overleftarrow{R}(y)$, i.e.

$$\forall x, y, x R y \Leftrightarrow \forall z, (z R x \Rightarrow z R y)$$

2) Si de plus R est symétrique (donc, une relation d'équivalence) alors $x R y \Leftrightarrow \overleftarrow{R}(x) = \overleftarrow{R}(y)$, i.e.

$$\forall x, y, x R y \Leftrightarrow \forall z, (z R x \Leftrightarrow z R y)$$

3) Si R est réflexive et $\forall x, y, z, (x R y \wedge z R y) \Rightarrow z R x$ alors R est une relation d'équivalence.

Preuves:

1) La transitivité se réécrit $\forall x, y, x R y \Rightarrow \forall z, (z R x \Rightarrow z R y)$.

Puis, R étant réflexive, $\forall x, y, (\forall z, z R x \Rightarrow z R y) \Rightarrow (x R x \Rightarrow x R y) \Rightarrow x R y$.

2) $\forall x, y, x R y \Leftrightarrow (x R y \wedge y R x) \Leftrightarrow (\overleftarrow{R}(x) \subset \overleftarrow{R}(y) \wedge \overleftarrow{R}(y) \subset \overleftarrow{R}(x)) \Leftrightarrow (\overleftarrow{R}(x) = \overleftarrow{R}(y))$.

3) on vérifie la symétrie: $\forall x, y, (x R y \wedge y R y) \Rightarrow y R x$. La transitivité en découle. \square

En fait, les propriétés 1) et 2) sont respectivement équivalentes aux notions de préordre et de relation d'équivalence, et peuvent donc leur servir de définitions.

2.8. Etude des relations d'équivalence

Partitions et familles-partitions

Soit E un ensemble.

On appellera *famille-partition de E* une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont l'union est E , autrement dit

$$\begin{aligned} \forall i \in I, A_i \neq \emptyset \\ \forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \\ \bigcup_{i \in I} A_i = E \end{aligned}$$

Reformulons la deuxième condition:

$$\begin{aligned} (\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) &\Leftrightarrow \forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow \forall x \in E, \neg(x \in A_i \wedge x \in A_j) \\ &\Leftrightarrow \forall i, j \in I, \forall x \in E, i \neq j \Rightarrow \neg(x \in A_i \wedge x \in A_j) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall i, j \in I, (x \in A_i \wedge x \in A_j) \Rightarrow i = j \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, !i \in I, x \in A_i \end{aligned}$$

Par conséquent, le système des 3 conditions pour qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E soit une famille-partition de E se résume en un système de deux conditions

$$\begin{aligned} \forall i \in I, \exists x \in E, x \in A_i \\ \forall x \in E, \exists !i \in I, x \in A_i. \end{aligned}$$

On appelle *partition de E* un ensemble P d'ensembles non vides, deux à deux disjoints et dont l'union est E . Ceci équivaut à dire que Id_P est une famille-partition de E .

Examinons les correspondances entre les notions suivantes:

- Surjection de domaine E ;
- Famille-partition de E ;
- Partition de E ;
- Relation d'équivalence sur E .

Surjection et famille-partition

Dans ce qui suit, interprétons la notation f^\bullet comme signifiant $f_{\text{Im } f}^\bullet$.

On a une bijection canonique entre l'ensemble des surjections f de E sur I et celui des familles-partitions de E indexées par I , définie par $f \mapsto f^\bullet$. En effet, $\mathcal{P}(E \times I) \simeq \mathcal{P}(E)^I$ envoie l'ensemble des graphes de surjections $\text{Gr } f$, sur l'ensemble des familles-partitions $f^\bullet = \overleftarrow{\text{Gr } f}$.

De surjection à relation d'équivalence

Relation d'équivalence associée à une fonction f . On nomme ainsi la relation \sim_f définie sur $E = \text{Dom } f$ par : $\forall x, y \in E, x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

Ses propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité se vérifient immédiatement.

Relation d'équivalence et partition, surjection canonique

Soit R une relation binaire sur E et $P = \text{Im } \overleftarrow{R}$, où par convention $\text{Dom } \overleftarrow{R} = E$.

Le fait que R soit une relation d'équivalence, se réexprime par les formules équivalentes

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, x R y &\Leftrightarrow \overleftarrow{R}(x) = \overleftarrow{R}(y) \\ \forall x, y \in E, x \in \overleftarrow{R}(y) &\Leftrightarrow \overleftarrow{R}(x) = \overleftarrow{R}(y) \\ \forall x \in E, \forall A \in P, x \in A = \text{Id}_P(A) &\Leftrightarrow \overleftarrow{R}(x) = A \\ \text{Id}_P &= \overleftarrow{R}^\bullet. \end{aligned}$$

L'ensemble des partitions de E , autrement dit des $P \subset \mathcal{P}(E)$ tels que Id_P est une famille-partition de E , donc de la forme $\overleftarrow{R}^\bullet$ pour une certaine relation binaire R sur E finalement unique, est ainsi en bijection canonique avec l'ensemble des relations d'équivalence.

Dans les constructions ci-dessus, lorsque R est une relation d'équivalence, et que donc P est une partition, l'ensemble P est appelé le *quotient de E par R* et noté E/R ; et la fonction $\overleftarrow{R} \in P^E$ est appelée *surjection canonique* de E sur E/R . Pour tout $x \in E$, l'élément $\overleftarrow{R}(x)$, unique élément A de P tel que $x \in A$, est appelé la *classe de x par R* .

De surjection à partition

A toute surjection f de E sur I nous avons associé une relation d'équivalence R sur E par $\forall x, y \in E, x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, et montré que toute relation d'équivalence R est égale à celle associée à \overleftarrow{R} . Puis nous avons associé à une telle relation R une partition $P = \text{Im } \overleftarrow{R}$ de E .

En fait $P = \text{Im}(f^\bullet)$, tout comme il était égal à $\text{Im}(\overleftarrow{R}^\bullet)$ où $\overleftarrow{R}^\bullet = \text{Id}_P$: la définition de R se traduit par

$$\forall x, y \in E, x \in \overleftarrow{R}(y) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \in f^\bullet(f(y))$$

autrement dit $\overleftarrow{R} = f^\bullet \circ f$, d'où $P = \text{Im } \overleftarrow{R} = \text{Im } f^\bullet$ puisque f est surjective.

L'ensemble I muni de f , étant naturellement par f^\bullet en bijection avec E/R , pourra être utilisé comme jouant le rôle de E/R , autrement dit être vu comme un autre quotient (une copie du quotient) de E par R ; le rôle de la surjection canonique est alors joué par f .

Remarque. $f_{\text{Im } f}^\bullet$ est injective (ce qui devient faux sur f^\bullet étendu à plus d'un élément hors de $\text{Im } f$).

On peut le voir directement, ou en notant que $\sim_f = \sim_{f^\bullet \circ f}$.

Autre résultat

Lemme. Soient E, F, G ensembles, $f \in F^E, g \in G^E, H = \text{Im}(f \times g) \subset F \times G$, et soit $R \subset F \times G$. Alors

$$(\forall x \in E, (f(x), g(x)) \in R) \Leftrightarrow (\forall (y, z) \in H, (y, z) \in R)$$

Théorème. Avec les mêmes notations, si $\text{Im } f = F$ et $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow g(x) = g(x')$ (ce qu'on abrégera en $\sim_f < \sim_g$) alors il existe un unique $h \in G^F$ tel que $g = h \circ f$. Finalement,

$$\begin{aligned} \{h \circ f | h \in G^F\} &= \{g \in G^E | \sim_f < \sim_g\} \\ \{h \circ f | h \in G^F \text{ et } h \text{ inject.}\} &= \{g \in G^E | \sim_f = \sim_g\} \end{aligned}$$

Preuve: $g = h \circ f \Leftrightarrow (\forall (y, z) \in H, z = h(y)) \Leftrightarrow H \subset \text{Gr } h$. On vérifie que H est un graphe fonctionnel de domaine F : d'une part, $\text{Im } f = F \Rightarrow \forall y \in F, \exists z \in G, (y, z) \in H$. Enfin,

$$\sim_f < \sim_g \Leftrightarrow \forall (y, z) \in H, \forall (y', z') \in H, y = y' \Rightarrow z = z' \quad \square$$

Notation. Soit $g \in F^E$ et R une relation d'équivalence sur E telle que $R < \sim_g$. On note alors g/R la fonction de domaine E/R définie par $g = (g/R) \circ \overleftarrow{R}$. Elle est injective lorsque $R = \sim_g$.

2.9. Notions sur les ensembles ordonnés

Pour toute relation binaire transitive R , on notera $x R y R z$ l'énoncé $((x R y) \wedge (y R z))$, qui implique que $x R z$. Et de même pour une plus longue chaîne de termes.

Dans un ensemble muni d'une relation d'ordre notée \leq , cette relation $x \leq y$ peut se lire "x est plus petit que y", "x est inférieur à y", "y est supérieur à x" ou encore "y est plus grand que x".

Deux éléments x et y sont dits *incomparables* lorsque $\neg(x \leq y \vee y \leq x)$. (Ceci implique que $x \neq y$). On dit plus généralement que des variables x_1, \dots, x_n (de domaine un même ensemble ordonné) sont incomparables, pour signifier $(\forall i \neq j, x_i \not\leq x_j)$.

Toute partie F d'un ensemble préordonné E est préordonné par la restriction à $F \times F$ de la relation de préordre sur E . Si cette dernière est un ordre alors celle sur F également.

Dans toute la suite, on regardera l'ensemble des parties $\mathcal{P}(X)$ de tout ensemble X , ainsi que tout $F \subset \mathcal{P}(X)$, comme des ensembles ordonnés par la relation d'inclusion.

fonctions croissantes, décroissantes, strictement croissantes

Soient E et F deux ensembles, respectivement munis des relations binaires R et S . On appellera *morphisme de (E, R) vers (F, S)* tout $f \in F^E$ satisfaisant les formules suivantes, qui sont équivalentes (notant $\pi \times \pi' = \text{Id}_{E \times E}$) :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, x R y &\Rightarrow f(x) S f(y) \\ \forall x \in X, f[\overleftarrow{R}(x)] &\subset \overleftarrow{S}(f(x)) \\ \forall x \in X, f[\overrightarrow{R}(x)] &\subset \overrightarrow{S}(f(x)) \\ ((f \circ \pi) \times (f \circ \pi'))[\text{Gr}(R)] &\subset \text{Gr}(S) \\ \text{Gr}(R) &\subset ((f \circ \pi) \times (f \circ \pi'))^*(\text{Gr}(S)) \end{aligned}$$

Cette notion sera généralisée ultérieurement.

Soient des ensembles préordonnés (E, R) et (F, S) . Sous-entendant le choix des relations de préordre R et S , une fonction f de E dans F sera dite :

- *croissante* ssi f est un morphisme de (E, R) vers (F, S)
- *décroissante* ssi $\forall x, y \in E, x R y \Rightarrow f(y) S f(x)$ (i.e. f est un morphisme de (E, R) vers $(F, {}^tS)$)
- *strictement croissante* ssi $\forall x, y \in E, x R y \Leftrightarrow f(x) S f(y)$
- *strictement décroissante* ssi $\forall x, y \in E, x R y \Leftrightarrow f(y) S f(x)$.

Soient trois ensembles préordonnés E, F, G et deux fonctions $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

- Si f et g sont toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes, alors $g \circ f$ est croissante.
- Si l'une est croissante et l'autre est décroissante alors $g \circ f$ est décroissante.
- Si $f \in F^E$ et $g \in E^F$ sont toutes deux croissantes (resp. toutes deux décroissantes) et $g \circ f = \text{Id}_E$, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

(On peut énoncer la même chose pour des relations binaires quelconques).

Pour tout $f \in F^E$ et toute relation R de préordre sur F , la relation binaire sur E définie par $(x, y) \mapsto (f(x) R f(y))$ est un préordre sur E , dit *image réciproque de R par f* . C'est l'unique préordre sur E pour lequel f est strictement croissante de E dans F .

Ordre quotient d'un préordre

Pour tout préordre R sur un ensemble E , \overleftarrow{R} est strictement croissante de (E, R) dans $\mathcal{P}(E)$:

$$\forall x, y \in E, x R y \Leftrightarrow (\forall z \in E, z R x \Rightarrow z R y) \Leftrightarrow \overleftarrow{R}(x) \subset \overleftarrow{R}(y).$$

De même, \overrightarrow{R} est strictement décroissante.

En fait, cette formule (sa première équivalence) est équivalente au fait que R soit un préordre, puisqu'elle précise que R est le préordre image réciproque de \subset par \overleftarrow{R} .

Soit \sim la relation d'équivalence $E \ni x, y \mapsto (x R y \wedge y R x)$,

$$\forall x, y \in E, x \sim y \Leftrightarrow (\forall z \in E, z R x \Leftrightarrow z R y) \Leftrightarrow \overleftarrow{R}(x) = \overleftarrow{R}(y).$$

En particulier si R est un ordre alors \sim égale = de sorte que \overleftarrow{R} est injective.

Plus généralement, pour toute fonction strictement croissante f de E dans un ensemble ordonné F , $\sim_f = \sim$. Ainsi, toute fonction strictement croissante ou strictement décroissante d'un ensemble ordonné dans un autre est injective (mais une fonction croissante injective entre ensembles ordonnés n'est pas toujours strictement croissante).

On peut ainsi voir \overleftarrow{R} comme surjection canonique de E dans $\text{Im } \overleftarrow{R}$ qui joue le rôle de quotient de E par la relation d'équivalence $\sim = (x, y \mapsto (x R y \wedge y R x))$. La relation d'ordre sur (E/\sim) copie de la relation d'inclusion dans $\text{Im } \overleftarrow{R}$, et qui est la seule rendant la surjection canonique strictement croissante, sera appelée *l'ordre quotient du préordre R* .

Ordre sur les ensembles de fonctions

Proposition. Pour tout ensemble E et tout ensemble ordonné (F, \leq) , la relation binaire sur F^E définie par $(f, g) \mapsto (\forall x \in E, f(x) \leq g(x))$ est une relation d'ordre, qu'on notera (abusivement) par le même symbole d'ordre: $f \leq g$. Puis, $\forall h \in E^E, f \leq g \Rightarrow f \circ h \leq g \circ h$. Enfin, si $u \in F^F$ est croissante et $f \leq g$ alors $u \circ f \leq u \circ g$; si $u \in F^F$ est décroissante et $f \leq g$ alors $u \circ g \leq u \circ f$.

Les vérifications sont immédiates.

Définition. Soit E un ensemble ordonné et $f \in E^E$. On dit que f est *extensive* ssi $\text{Id}_E \leq f$, i.e. $\forall x \in E, x \leq f(x)$.

Proposition. La composée de deux fonctions extensives est extensive.

Preuve: si $f, g \in E^E$ sont extensives, $\text{Id}_E \leq \text{Id}_E \circ f \leq g \circ f$. □

2.10. Axiome du choix

Axiome du choix (AC). Il s'écrit "Pour tout ensemble X , AC_X ", où AC_X (axiome du choix sur X) est l'énoncé pouvant s'écrire sous les formes équivalentes:

- 1) Tout produit indexé par X d'ensembles non vides est non vide
- 2) Pour tout ensemble E et toute relation R entre X et E ,

$$(\forall x \in X, \exists y \in E, R(x, y)) \Rightarrow (\exists f \in E^X, \forall x \in X, R(x, f(x)))$$

- 3) Toute fonction g d'image X a un inverse à droite: $\exists f \in (\text{Dom } g)^X, g \circ f = \text{Id}_X$.

1) \Rightarrow 2) est immédiat;

2) \Rightarrow 1) en définissant E par l'union.

2) \Rightarrow 3) en définissant $R(x, y) \Leftrightarrow (x = g(y))$.

1) \Rightarrow 3) en prenant la famille g^\bullet d'ensembles non vides.

3) \Rightarrow 1) par la somme de la famille

3) \Rightarrow 2) à l'aide du graphe de R . □

Déjà, AC_X est vrai si X est fini (on l'a vu dans le cas méta-fini et on le vérifiera ultérieurement).

Théorème. Les énoncés suivants sont équivalents à l'axiome du choix:

- 4) Pour tous ensembles E, F, G et toute $g \in G^F$ surjective, $\{g \circ f \mid f \in F^E\} = G^E$.
- 5) Pour tout ensemble E et toute relation d'équivalence R sur E , $\exists A \subset E, \forall x \in E, \exists ! y \in A, x R y$.
- 6) Pour tout ensemble E d'ensembles, $\emptyset \notin E \Rightarrow (\prod_{A \in E} A) \neq \emptyset$.

Preuves:

$\text{AC}_E \Rightarrow$ 4) par $\forall h \in G^E, (\forall x \in E, \exists y \in F, g(y) = h(x)) \Rightarrow (\exists f \in F^E, \forall x \in E, g(f(x)) = h(x))$

$\text{AC}_G \Rightarrow$ 4) par $\exists i \in F^G, g \circ i = \text{Id}_G \wedge \forall h \in G^E, i \circ h \in F^E \wedge g \circ i \circ h = h$.

4) \Rightarrow 3) : avec $E = G$, par $\text{Id}_E \in \{g \circ f \mid f \in F^E\}$.

3) \Rightarrow 5) : $\exists g \in E^{E/R}, \overleftarrow{R} \circ g = \text{Id}_{E/R}$ de sorte que $A = \text{Im } g$ convient.

5) \Rightarrow 3) : soit $E = \text{Dom } g$, et $A \subset E$ tel que $\forall x \in E, \exists ! y \in A, g(x) = g(y)$. Alors $g|_A$ est bijective de A sur X , et son inverse $f \in A^X \subset E^X$ vérifie $g \circ f = g|_A \circ f = \text{Id}_X$.

1) \Rightarrow 6) : il suffit de prendre la famille Id_E .

6) \Rightarrow 1) : soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles non vides, et soit E son image $\{A_i \mid i \in I\}$. On a alors $\emptyset \notin E$, donc il existe $f \in \prod_{A \in E} A$. Alors $(f(A_i))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$. □

L'axiome du choix est indécidable dans l'axiomatique ZF (les produits et puissances étant relatifs à l'univers): s'il existe un univers \mathcal{U} où AC est vrai alors il existe \mathcal{U}' où il est faux, et inversement. On peut avoir $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, avec dans \mathcal{U}' une famille d'ensembles de produit non vide dans \mathcal{U} mais disjoint de \mathcal{U}' . Ou $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$, avec une famille d'ensembles infinis $E_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{U}$ (deux à deux disjoints), de produit vide. Mais les détails de ces constructions sont inabordables à ce stade.

En pratique, AC étant conforme à l'intuition et plus facile à affirmer qu'à nier (comme il y a plusieurs manières de le nier), la majorité des travaux de mathématiques qui en dépendent le supposent vrai. Mais bien des questions n'en dépendent pas, ou se satisfont d'une version plus faible comme $\text{AC}_{\mathbb{N}}$.

Dans la suite nous utiliserons les opérateurs de puissance de manière encore plus poussée; mais non pas l'axiome du choix (sauf cas particuliers), pour la seule raison qu'on n'en aura pas besoin.